Ecole d'été
Mécanique Théorique
Quiberon

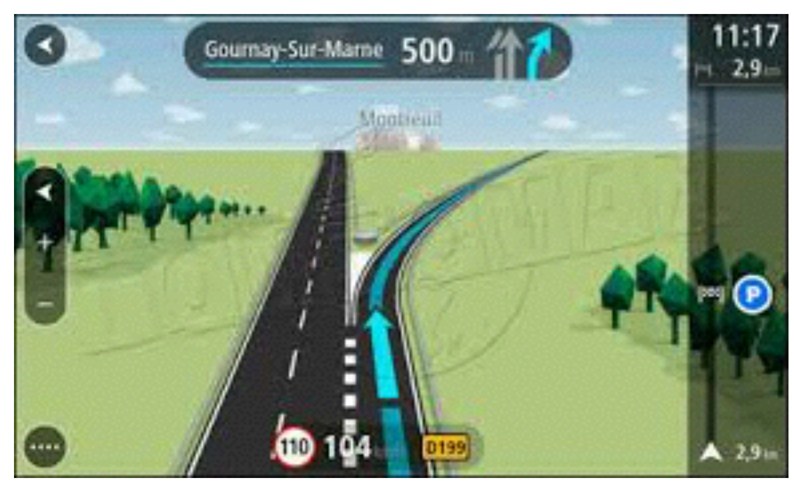
septembre 2015

Cours 2

ANALYSE DES BIFURCATIONS
Le problème en vitesses

Etat fixé et on regarde l'evolution du système a partir de cet état

à partir de cet état champ de vitesses mais aussi vitesses des contraintes, etc…



exemple de réponse Bifurcation tangente non tangente

Grandes transformations

Confond la configuration de référence avec la configuration actuelle

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} \text{ et } \dot{\mathbf{F}} \neq 0$$

Tenseur nominal des contraintes

$$s_{ij} dS$$

jème composante de la force courante agissant sur un élément de surface qui dans la configuration de référence a une normale dirigée selon $\mathbf{e}_i$

Equations d'équilibre

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial a_i} + g_j^0 = 0$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} + g_j = 0$$

Loi de comportement

Ecrite en vitesse

$$\dot{s}_{ij} = G_{ij}(\nabla \mathbf{v}, \mathrm{etat})$$

le problème en vitesses

Equilibre:

$$\frac{\partial \dot{s}_{ij}}{\partial x_i} + \dot{g}_j = 0$$

Conditions aux limites

$$\dot{s}_{ij} n_i = \dot{f}_j \text{ sur } S_f$$

$$v_j = d_j \text{ sur } S_v$$

Elasticité

Cadre hyperélastique
Densité d'énergie élastique

$$E(\mathbf{F})$$

$$s_{ij} = \frac{\partial E}{\partial F_{ji}}$$

$$\dot{s}_{ij} = c_{ijkl}\dot{F}_{ji} = c_{ijkl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}$$

$$c_{ijkl} = c_{klij} = \frac{\partial^2 E}{\partial Fji \partial F_{lk}}$$

Bifurcation

On suppose qu'on a deux solutions $v_j^1 \neq v_j^2$

$$\Delta v_j = v_j^1 - v_j^2$$

$$\Delta \dot{s}_{ij} = \dot{s}_{ij}^1 - \dot{s}_{ij}^2 = c_{ijkl} \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{ijkl} \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x_k} \right) = 0$$

$$c_{ijkl} \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x_k} n_i = 0 \text{ sur } S_f \text{ et } \Delta v_j = 0 \text{ sur } S_v$$

c_{ijkl} état propre Δv_j mode propre

Critère de non bifurcation

Integration sur le volume, formule de la divergence

$$\int_V c_{ijkl} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} dV = 0$$

unicité si

$$\int_V c_{ijkl} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} dV > 0 \; \forall \; \mathbf{v} \; C1 \text{ et nul sur } S_f$$

Remarques: 1) < 0 marche aussi mais instabilité!

2) condition satisfaite si $c_{ijkl} > 0 \text{ partout}$

Stabilité

Critère de l’énergie: Etat d’équilibre est stable si dans tout mouvement virtuel à partir de cet état, la variation d’énergie interne est plus grande ou égale que le travail virtuel des efforts extérieurs

$$dE > dW$$

Critère de stabilité

Solide déformé par un chargement chargement arbitraire jusqu'à une configuration d'équilibre donnée C

déplacement virtuel δu_j de la configuration C à une configuration virtuelle C'

Cet état d'équilibre est stable au sens indiqué précédemm

$$\int_V \delta E - \int_0^\tau \left[\int_V g_j \frac{\partial \delta u_j}{\partial \tau} dV + \int_{S_f} f_j \frac{\partial \delta u_j}{\partial \tau} dS\right] d\tau \geq 0$$

ou dans le cas de charges

$$\int_V \delta E dV - \int_V g_j \delta u_j dV - \int_S f_j \delta u_j dS \geq 0 \ \forall \ \delta u_j = 0 \text{ sur } S_v$$

Critère de stabilité

$$\int_V \delta E dV - \int_V g_j \delta u_j dV - \int_S f_j \delta u_j dS \geq 0 \ \forall \ \delta u_j = 0 \text{ sur } S_v$$

$$\int_V (\delta E - s_{ij} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}) dV \geq 0 \ \forall \ \delta u_j = 0 \text{ sur } S_v$$

OU

$$\int_V c_{ijkl} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_i} dV \geq 0 \ \forall \ \delta u_j = 0 \text{ sur } S_v$$

Elasto-plasticité

$$D_{ij} = D^e_{ij} + D^p_{ij}$$

élasticité $$\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(D_{kl} - D^p_{kl})$$

Fonction de charge $$f(\boldsymbol{\sigma}, R) \leq 0$$

Loi d'écoulement $$D^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Loi d'écrouissage $$\dot{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial R}$$

$$\lambda \geq 0 \ , \ f \leq 0 \text{ and } \lambda \dot{f} = 0$$

Elasto-plasticité

$$\hat{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} D_{kl}$$

Charge ou décharge élastique

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} \text{ si } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D} < 0$$

Charge plastique

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \text{ si } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D} \geq 0$$

Module tangent symétrique

$$\dot{s}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - (\sigma_{ik}D_{jk} - \sigma_{jk}D_{ik})$$

$$\begin{aligned}\dot{s}_{ij} &= H_{ijkl}D_{kl} + \sigma_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - (\sigma_{ik}D_{jk} - \sigma_{jk}D_{ik}) \\ &= L_{ijkl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\end{aligned}$$

Petites déformations

Remarque: pour faire des petites déformations

remplacer la dérivée chapeau (Jauman) par la dérivée par rapport au temps classique et enlever la fonctionnelle$\Sigma($

Bifurcation

On suppose qu'on a deux solutions $v_j^1 \neq v_j^2$

$$\Delta v_j = v_j^1 - v_j^2$$

$$\Delta \dot{s}_{ij} = \dot{s}_{ij}^1 - \dot{s}_{ij}^2 \neq L_{ijkl} \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial \Delta \dot{s}_{ij}}{\partial x_i} = 0 \text{ sur } V$$

$$\Delta \dot{s}_{ij} n_i = 0 \text{ sur } S_f \text{ et } \Delta v_j = 0 \text{ sur } S_v$$

Critère de non bifurcation

Intégration sur le volume et application de la formule de la divergence

$$\int_V \Delta \dot{s}_{ij} \Delta \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \int_V \Delta \hat{\sigma}_{ij} D_{ij} dV - \Sigma(\Delta \mathbf{v}) = 0 \text{ dans } V$$

$$\Sigma(\mathbf{v}) = \int_V \left[\sigma_{ik} \left(2 D_{ij} D_{jk} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] dV$$

Critère de non bifurcation

$$\int_V \Delta \hat{\sigma}_{ij} D_{ij} dV - \Sigma(\Delta \mathbf{v}) dV > 0 \forall \text{ paire } \mathbf{v}^1,\ \mathbf{v}^2 \text{ verifiant les CL sur } S_v$$

Solide linéaire de comparaison

Condition précédente difficile à appliquer

h>0 $$\int_V \Delta\hat{\sigma}_{ij} D_{ij} dV \geq H(\Delta\mathbf{v})$$

$$H(\mathbf{w}) = \int_V \mathbf{D}(\mathbf{w}) : \mathbf{C} : \mathbf{D}(\mathbf{w}) dV - \int_{V_p} \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}(\mathbf{w})}{h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} dV_p$$

Nouveau critère de non bifurcation

$$H(\mathbf{w}) - \Sigma(\mathbf{w}) \geq 0 \ \forall \ \mathbf{w} \ \mathrm{C} \ \mathrm{et\ nul\ sur} \ S_v$$

Solide linéaire de comparaison

On a remplacé en fait les modules tangents partout par les modules tangents en charge

$$\mathbf{H}^L = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bigotimes \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Critère de bifurcation

On considère l'instant ou pour la première fois la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = H(\mathbf{w}) - \Sigma(\mathbf{w})$$

s'annule pour un $\mathbf{w}^* \neq 0$

On a alors $\mathcal{F}(\mathbf{w}) \geq 0 \ \forall \mathbf{w}$

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}^*) = 0$$

$\mathbf{w}^*$ réalise un minimum de cette fonctionnelle et il est solution

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(H^L_{ijkl}\frac{\partial w_l}{\partial x_k}\right) = 0 \qquad H^L_{ijkl}\frac{\partial w_l}{\partial x_k}n_i = 0 \text{ sur } S_f \qquad w_j = 0 \text{ sur } S_v$$

Critère de bifurcation

est maintenant possible de construire une solution au problème
vitesses pour le solide réèl à partir de la solution fondamentale

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \zeta \mathbf{w}^*$$

En effet, si la solution fondamentale est en charge partout
dans la zone plastique

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}^0 \geq 0$$

Il suffit de choisir ζ de manière à ce que

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : (\mathbf{D}^0 + \zeta \mathbf{D}^*) \geq 0$$

Bifurcation du solide linéaire de comparaison

Stabilité

$$\int_V \hat{\sigma}_{ij} D_{ij} - \Sigma(\mathbf{v}) dV > 0 \ \forall \ \mathbf{v} \text{ nul sur } S_v$$

à comparer avec le critère de non bifurcation

$$\int_V \Delta\hat{\sigma}_{ij} D_{ij} dV - \Sigma(\Delta\mathbf{v}) dV > 0 \forall \text{ paire } \mathbf{v}^1,\ \mathbf{v}^2 \text{ verifiant les CL sur } S_v$$

Critères distincts

unicité -> stabilité

mais pas l'inverse

Lorsque la fonctionnelle de stabilité s’annule pour la première fois, on a un état propre du système homogène correspondan
au système non linéaire étudié