Ecole d’été
Mécanique Théorique
Quiberon

septembre 2015

Cours 4

le problème en vitesses

Equilibre:

$$\frac{\partial \dot{s}_{ij}}{\partial x_i} + \dot{g}_j = 0$$

Conditions aux limites

$$\dot{s}_{ij} n_i = \dot{f}_j \text{ sur } S_f$$

$$v_j = d_j \text{ sur } S_v$$

Elasticité

Cadre hyperélastique
Densité d'énergie élastique

$$E(\mathbf{F})$$

$$s_{ij} = \frac{\partial E}{\partial F_{ji}}$$

$$\dot{s}_{ij} = c_{ijkl}\dot{F}_{ji} = c_{ijkl}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}$$

$$c_{ijkl} = c_{klij} = \frac{\partial^2 E}{\partial Fji \partial F_{lk}}$$

Elasto-plasticité

$$\hat{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} D_{kl}$$

Charge ou décharge élastique

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} \text{ si } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D} < 0$$

Charge plastique

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \text{ si } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D} \geq 0$$

Module tangent symétrique

Rappel

Problème en vitesse **linéaire** en élasticité

Problème en vitesses **non linéaire** en élastoplasticité
mais dans le cas symétrique, on a vu que le problème de la première bifurcation est ramené à la recherche de la première bifurcation du **solide linéaire de comparaison**

condition de localisation **non affectée** par la symétrie du module tangent

Le problème en vitesses

$$\mathcal{A}_i(\mathbf{v}) = \frac{\partial\left[H_{ijkl}^L(\mathbf{x})\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right]}{\partial x_i} + g_j = 0 \text{ dans } V$$

$$\mathcal{B}_j(\mathbf{v}) = L_{ijkl}^L(\mathbf{x})\frac{\partial v_l}{\partial x_k} n_i = 0 \text{ sur } S_f$$

$$\mathcal{C}_j(\mathbf{v}) = v_j = d_j \text{ sur } S_v$$

Problème linéaire en dimension finie

T opérateur linéaire de E —> F
dim E=rang(T)+ dim Ker(T)

Coker(T)= F/Im(T)
dim Coker(T) = codim(Im T)

et donc

Ind(T) = dim Ker(T)-codim(Im T)=dim E - dim F
indépendant de l'opérateur

T est injectif sis il est surjectif

Problème linéaire en dimension finie

$$A\,x = b$$

1) $\det(A) \neq 0$ solution unique
2) $\det(A) = 0$ nbre fini de solutions si $A^*b=0$

Le cas de la dimension infinie: Alternative de Fredholm

K opérateur compact

u=Ku +f

1) La solution est unique pour tout f

2) ou alors u-Ku=0 a un nombre fini (N) de solutions linéairement indépendantes et dans ce cas l'equation complète a N solutions linéairement indépendantes di f est dans le noyau de l'orthogonal de I-K*

Le cas de la dimension infinie: Opérateurs de Fredholm

A linéaire et continu est Fredholm si et seulement si

1) A a un noyau de dimension fini
2) A a une image fermée de codimension finie

Le problème en vitesses

L'opérateur associé au problème en vitesses

$$\mathcal{T} = ((\mathcal{A}_j), (\mathcal{B}_j), (\mathcal{C}_j))$$

est Fredholm si et seulement si

1) Le système différentiel $\mathcal{A}_j$ est elliptique en tout point de V

2) Les conditions aux limites $\mathcal{B}_j$ et $\mathcal{C}_j$ vérifient la condition complémentaire en tout point de la frontière de V

Ellipticité des équations d'équilibre (en vitesses)

Le système est dit elliptique si pour tout point $\mathbf{x}_0$ de V il n'a aucune solution de la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}e^{i\xi\mathbf{n}.\mathbf{x}}$$

sur l'espace entier

$Det[\mathbf{n}.\mathbf{H}.\mathbf{n}] \neq 0 \ \forall \ \mathbf{n}$ en tout point $\mathbf{x}_0$ de V

Condition complémentaire

Pour tout point de la frontière $\mathbf{x}_0$, le problème linéaire sur le demi-espace

$$\frac{\partial \left[H^L_{ijkl}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right]}{\partial x_i} = 0$$

$$L^L_{ijkl}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial v_l}{\partial x_k} n_i = 0$$

n'a aucune solution bornée de la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = z(x_3) \exp i(k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

Perte de la condition complémentaire -> Modes de surfaces longueur d'onde indéterminée

Exemple:
Essai de traction en déformation plane
(Hill, Hutchinson, 1975)

Loi de comportement linéaire en vitesses

$$\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = 2\mu^\star(D_{11} - D_{22})$$

$$\hat{\sigma}_{12} = 2\mu D_{12}$$

Biot, 1965

$$\dot{s}_{11} = \hat{\sigma}_{11} - \sigma_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$\dot{s}_{22} = \hat{\sigma}_{11}$$

$$\dot{s}_{12} = \hat{\sigma}_{12} - \frac{1}{2}\sigma_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\sigma_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

$$\dot{s}_{21} = \hat{\sigma}_{21} - \frac{1}{2}\sigma_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\sigma_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1}$$

Equations du problème

$$\frac{\partial \dot{s}_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2}(\dot{s}_{11} - \dot{s}_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_2}\dot{s}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2}(\dot{s}_{11} + \dot{s}_{22})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2}(\dot{s}_{11} - \dot{s}_{22}) - \frac{\partial}{\partial x_2}\dot{s}_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{2}(\dot{s}_{11} + \dot{s}_{22})$$

Incompressibilité

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

$$v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

$$(\mu + \frac{1}{2}\sigma)\frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^4} + 2(2\mu^\star - \mu)\frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma)\frac{\partial^4 \psi}{\partial x_2^4} = 0$$

Solution

$$\psi = v(x_2)\cos(c_1 x_1)$$

$$v_1 = v'(x_2)\cos(c_1 x_1), \qquad v_2 = c_1 v(x_2)\sin(c_1 x_1)$$

condition aux limites en vitesses $\quad c_1 = m\pi/2a_1, \quad m = 1, 2, \ldots$

condition aux limites sur
Les côtés

$$v'' + c_1^2 v = 0, \qquad x_2 = \pm a_2$$

$$(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma)v''' = (4\mu^* - \mu - \tfrac{1}{2}\sigma)c_1^2 v', \qquad x_2 = \pm a_2$$

Modes symétriques $\quad v(x_2) = \mathrm{Re}\,\{A\sin(c_2 x_2)\}$

Modes antisymétriques $\quad v(x_2) = \mathrm{Re}\,\{A\cos(c_2 x_2)\}$

Solution

$$(\mu + \frac{1}{2}\sigma)c_1^4 + 2(2\mu^\star - \mu)c_1^2 c_2^2 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma)c_2^4 = 0$$

E: 4 racines complexes

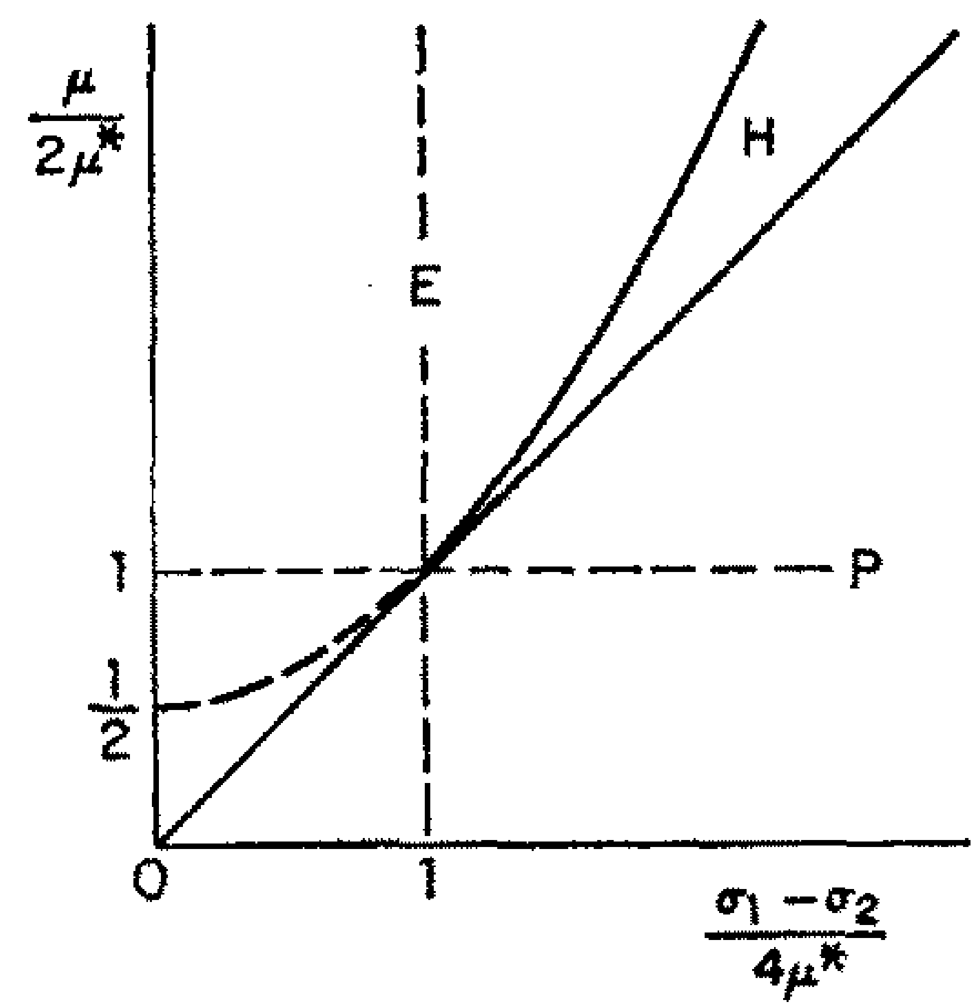
$$2\mu^\star > \mu - \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}\sigma^2}$$

H: 4 racines réelles

$$2\mu^\star < \mu - \sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}\sigma^2}$$

P: 2 racines réèlles

$$\mu < \frac{1}{2}\sigma$$



Regime elliptique

$$\frac{q\sin(2pc_1a_2)}{p\sinh(2qc_1a_2)} = \pm\frac{\sqrt{\left(\frac{2\mu-\sigma}{2\mu+\sigma}\right)} - \left(1 - \frac{4\mu^*}{\sigma}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2\mu-\sigma}{2\mu+\sigma}\right)} + \left(1 - \frac{4\mu^*}{\sigma}\right)}$$

$$p^2 - q^2 = \frac{2\mu - 4\mu^*}{2\mu-\sigma}, \qquad p^2 + q^2 = \sqrt{\left(\frac{2\mu+\sigma}{2\mu-\sigma}\right)}$$

$$\gamma = c_1a_2 = m\pi a_2/2a_1$$

Régime hyperbolique

$$\frac{q \tan(pc_1 a_2)}{p \tan(qc_1 a_2)} = \left(\frac{q^2-1}{p^2-1}\right)^2$$

$$\frac{q \tan(qc_1 a_2)}{p \tan(pc_1 a_2)} = \left(\frac{q^2-1}{p^2-1}\right)^2$$

$$\tfrac{1}{2}(p^2+q^2) = \frac{2\mu-4\mu^*}{2\mu-\sigma}, \qquad \tfrac{1}{2}(p^2-q^2) = \frac{\sqrt{\{(4\mu^*-2\mu)^2+(\sigma^2-4\mu^2)\}}}{2\mu-\sigma}$$

$$\gamma = c_1 a_2 = m\pi a_2/2a_1$$

Régime parabolique

$$\frac{q \tan(pc_1 a_2)}{p \tanh(qc_1 a_2)} = \left(\frac{q^2+1}{p^2-1}\right)^2$$

$$\frac{q \tanh(qc_1 a_2)}{p \tan(pc_1 a_2)} = -\left(\frac{q^2+1}{p^2-1}\right)^2$$

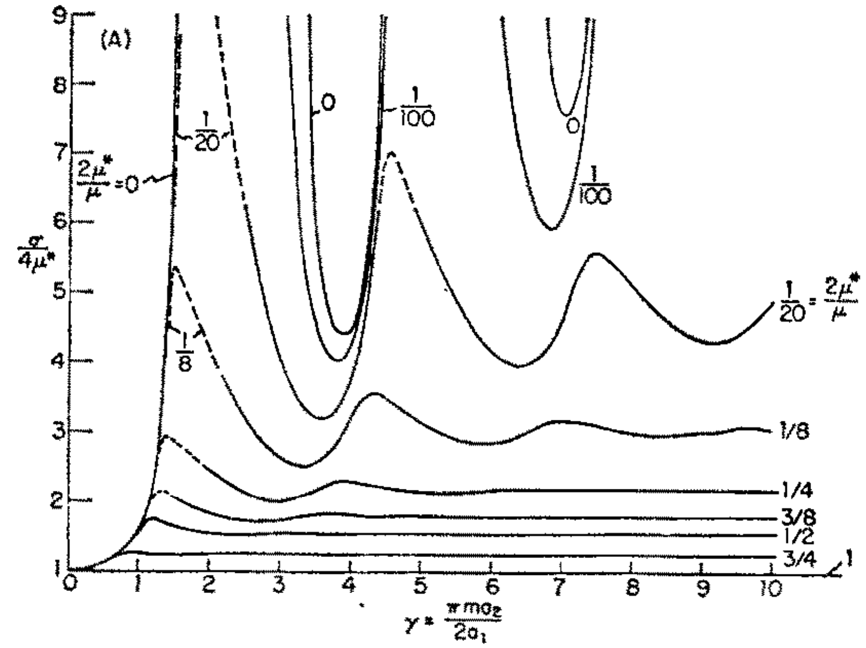
$$\tfrac{1}{2}(p^2-q^2) = \frac{4\mu^*-2\mu}{\sigma-2\mu}, \qquad \tfrac{1}{2}(p^2+q^2) = \frac{\sqrt{\{(4\mu^*-2\mu)^2+(\sigma^2-4\mu^2)\}}}{\sigma-2\mu}$$

$$\gamma = c_1 a_2 = m\pi a_2/2a_1$$

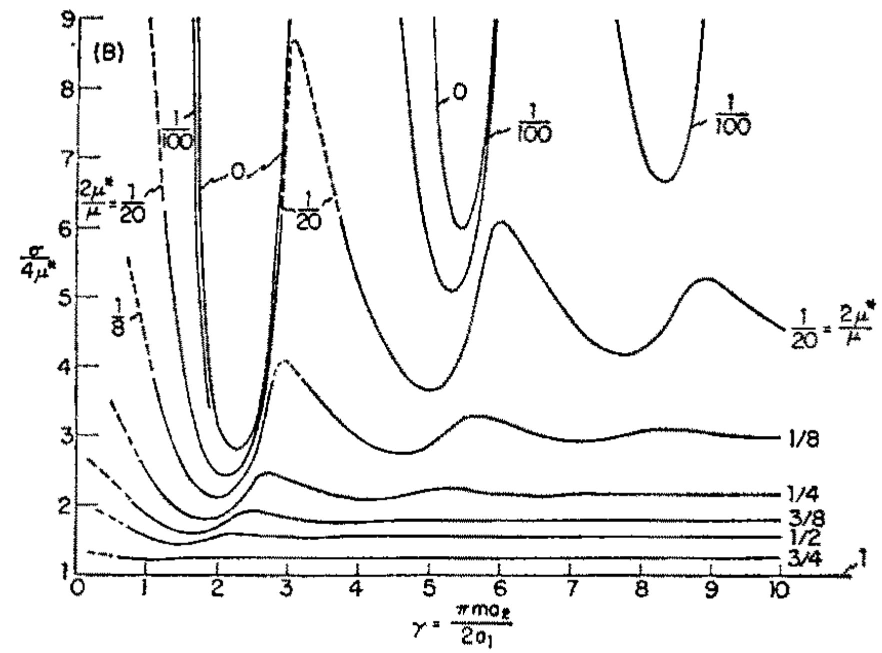
Modes de surface

$$\frac{\sigma}{4\mu^*} = 1 + \frac{\sigma}{4\mu^*}\sqrt{\left(\frac{2\mu-\sigma}{2\mu+\sigma}\right)}$$

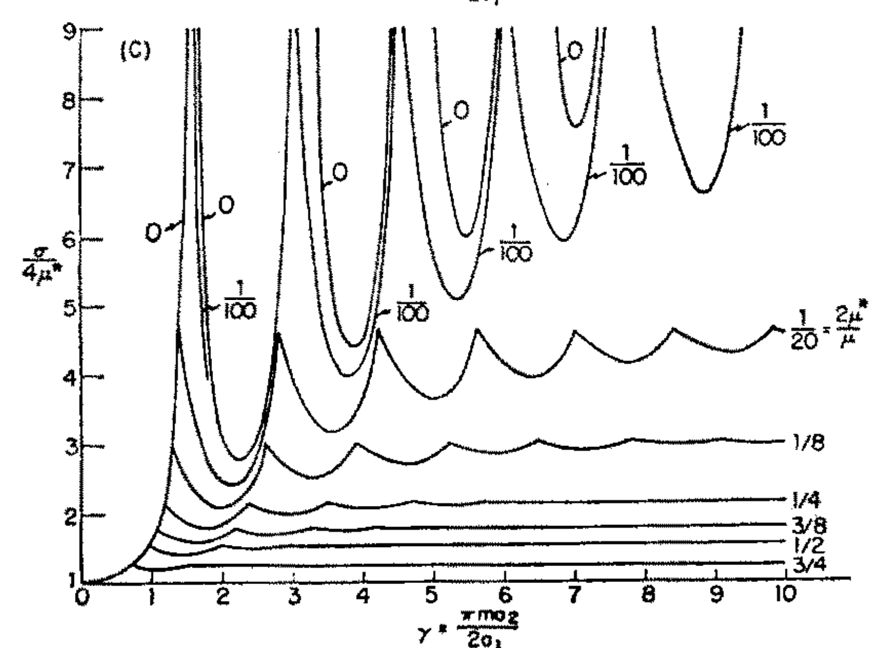
(a)


(A)
$\frac{\sigma}{4\mu^*}$
$\frac{2\mu^*}{\mu}=0$
$\frac{1}{20}$
0
$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{20}=\frac{2\mu^*}{\mu}$
1/8
1/4
3/8
1/2
3/4
1
$\gamma=\frac{\pi m a_2}{2a_1}$

(b)


(B)
$\frac{\sigma}{4\mu^*}$
$\frac{2\mu^*}{\mu}=\frac{1}{20}$
$\frac{1}{100}$
0
$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{20}=\frac{2\mu^*}{\mu}$
1/8
1/4
3/8
1/2
3/4
1
$\gamma=\frac{\pi m a_2}{2a_1}$

(c)


(C)
$\frac{\sigma}{4\mu^*}$
0
$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{20}=\frac{2\mu^*}{\mu}$
1/8
1/4
3/8
1/2
3/4
$\gamma=\frac{\pi m a_2}{2a_1}$

Effets non locaux élasto-plasticité

$$D_{ij} = D^e_{ij} + D^p_{ij}$$

élasticité $$\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(D_{kl} - D^p_{kl})$$

Fonction de charge $$f(\boldsymbol{\sigma}, R) \leq 0$$

Loi d'écoulement $$D^p_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Loi d'écrouissage $$\dot{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial R}$$

$$\lambda \geq 0 \ , \ f \leq 0 \text{ and } \lambda \dot{f} = 0$$