

Instabilités et bifurcations locales - Éléments de théorie

Gérard IOOSS, IUF, Université Nice-Sophia-Antipolis

1. **Instabilités et Bifurcations locales élémentaires.** Il s'agit de présenter la théorie en dimension 1 pour les bifurcations noeud-col et fourche (en présence d'une symétrie de réflexion), puis les bifurcations élémentaires en dimension 2 : tout d'abord la bifurcation de Hopf avec introduction de la forme normale (exemple avec Van der Pol), et l'étude du cas avec symétrie $SO(2)$ (invariance par rotation). Ensuite nous verrons la bifurcation stationnaire en présence de la symétrie $O(2)$ (symétrie du cercle).
2. **Variété centrale.** Il s'agit de la réduction de la dynamique locale d'un système à un système de (petite) dimension. On présente le résultat général en dimension finie, puis une version simplifiée en dimension infinie (EDP ou autre). On étudie le cas de systèmes avec paramètres, en présence ou non de symétries, . . . Des exemples (EDP) illustrent chaque résultat.
3. **Formes normales.** Il s'agit, à l'aide d'un changement de variables, de simplifier au maximum le système réduit à une variété centrale, afin d'en voir la dynamique. Les formes normales sont particulièrement efficaces, en présence de plusieurs paramètres et en présence de symétries.
4. **Applications en Mécanique des fluides.** Les résultats théoriques précédents s'appliquent idéalement au problème de Couette-Taylor (instabilités d'un écoulement de fluide visqueux sis entre deux cylindres coaxiaux, en rotations uniformes), au problème de la convection de Rayleigh-Bénard (instabilité d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux, chauffé par en dessous), au problème de l'existence des vagues (recherche des ondes progressives en fluide parfait).

Bibliographie.

M. HARAGUS, G. IOOSS. *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in infinite Dimensional Dynamical Systems*. Springer Verlag, Universitext (2011).